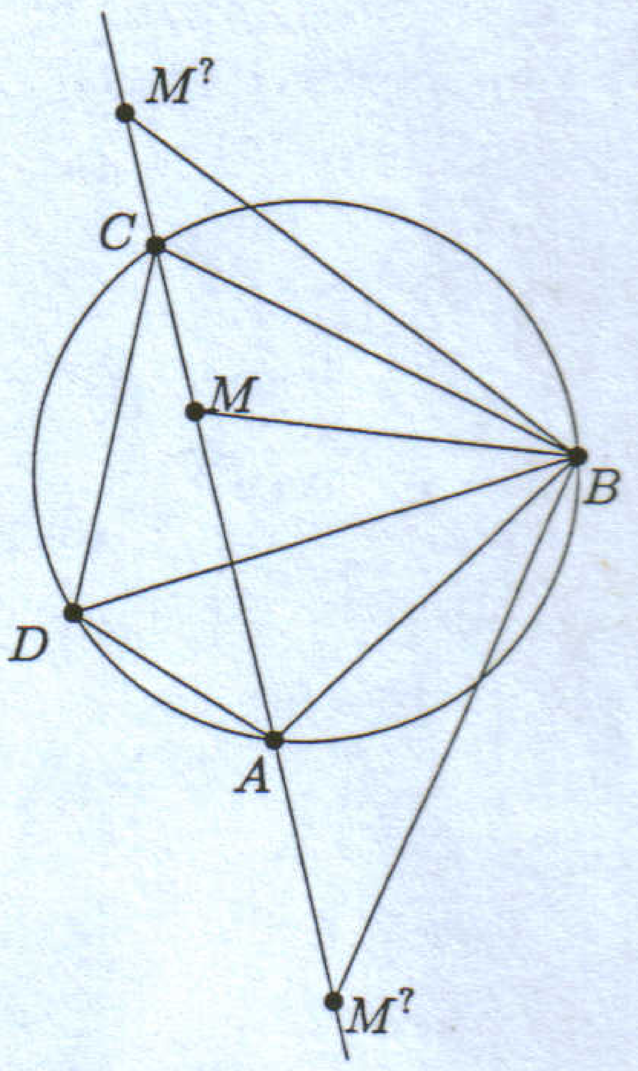
контрадикција с горњом једнакошћу јер $10 \nmid aA$. Најзад, претпоставимо да се n завршава цифром различитом од 0 и a. Тада имамо $10 \mid A, B$ и $10 \nmid x$, и поново контрадикција. Следи да не постоје решења за $k = 8$.

Према свему, једине вредности израза $\frac{n}{f(n)}$ у скупу природних бројева су: 1, 6, 7, 9 и 10.

Први разред – Б категорија

1. Из четвртог услова (уз први) добијамо да у скупу A могу бити само бројеви 1, 2 и 3. Из трећег услова имамо $3 \notin A$, а из другог $2 \in A$. Даље, из последњег услова имамо $1 \notin B$, а како $1 \in A \cup B$, следи $1 \in A$. Тиме смо једнозначно идентификовали скуп A: $A = \{1, 2\}$. У скупу B морају бити сви бројеви 3, 4, 5 и 6, како би био испуњен први услов. Из другог услова још имамо $2 \notin B$, а из последњег $1 \notin B$. Остаје, дакле, једино могуће $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

2. Приметимо, слова T и R у траженој шифри се јављају по три пута, а сва преостала слова по једном. Дакле, како прво и последње слово морају бити исто, по услову задатка то мора бити једно од слова T или R. Претпоставимо да шифра почиње и завршава се словом T. Тада унутар шифре преостаје укупно 10 слова, међу којима се R јавља три пута а преостала слова по једном; дакле, они се могу испермутовати на $\frac{10!}{3!}$ начина, што је и укупан број могућих шифара које почињу и завршавају се са T. Уколико шифра почиње словом R, рачун је потпуно аналоган, те у том случају добијамо још исто толико могућности. Дакле, укупно постоји $2 \cdot \frac{10!}{3!} = \frac{10!}{3}$ могућности које Бетмен треба да испроба.



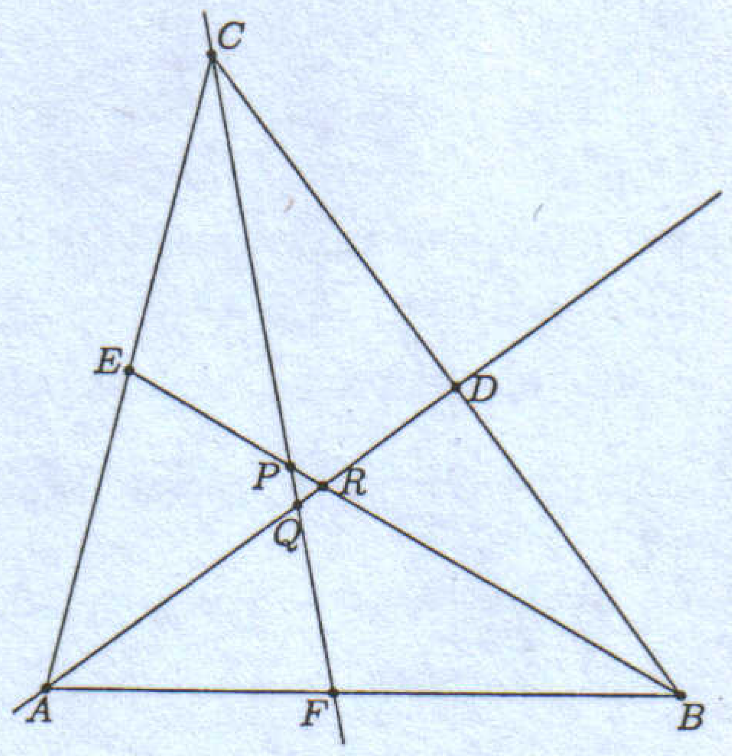
Ок 2019 1Б 3

3. Из тетивности четвороугла $ABCD$ добијамо $\angle ACB = \angle ADB = 50°$ и $\angle CAB = \angle CDB = 60°$. Претпоставимо да је тачка M изван дужи AC. Ако би важио распоред $A{-}C{-}M$, тада би $\angle ACB$ био спољашњи за $\triangle BCM$, па би морало важити $\angle ACB > \angle AMB$, што је немогуће (та два угла износе 50° и 70°, редом). Слично, ако би важио распоред $C{-}A{-}M$, следило би $\angle CAB > \angle AMB$, опет немогуће. Дакле, преостаје једино могућност да је тачка M на дужи AC.

4. Приметимо,

$$10^{2019} - 9991 = 1\underbrace{00\ldots00}_{2019} - 9991 = \underbrace{99\ldots9}_{2015}0009 = 9 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{2015}0001.$$

Дакле, да би посматрани број био дељив са 81, довољно је још показати да је број $\underbrace{11\ldots1}_{2015}0001$ дељив са 9. Како његов збир цифара износи $2015 \cdot 1 + 1 = 2016$, што јесте дељиво са 9, следи да је и тај број дељив са 9, чиме је задатак решен.



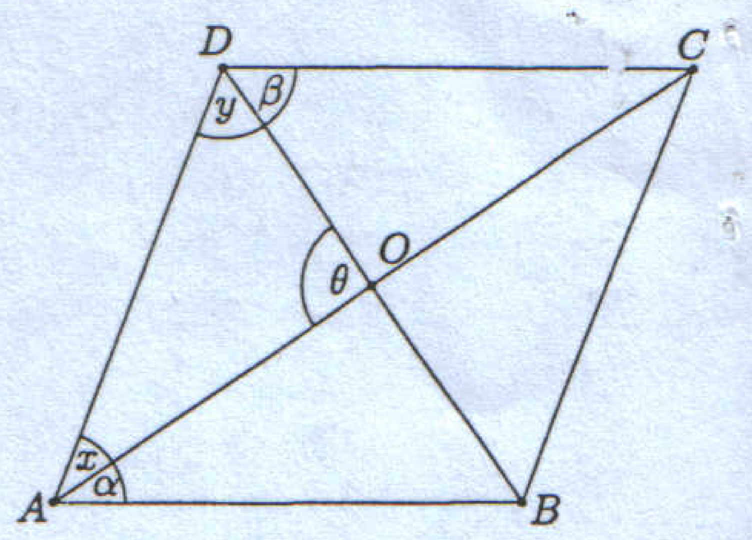
Ок 2019 1Б 5

5. Нека је AD висина, BE тежишна дуж, а CF симетрала угла у оштроуглом $\triangle ABC$. Нека се AD и BE секу у тачки R, AD и CF у тачки Q, а BE и CF у тачки P. Претпоставимо супротно тврђењу задатка, тј. да је $\triangle PQR$ једнакостраничан. Како важи $\angle CQD = 60°$ и $\angle QDC = 90°$, следи $\angle QCD = 30°$. Како је CF симетрала угла, одатле добијамо $\angle QCE = 30°$, а како важи и $\angle CPE = 60°$, следи $\angle PEC = 90°$. Сада уочавамо $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ (због $BE \cong BE$, $AE \cong CE$ и $\angle AEB = \angle CEB = 90°$), па је $\triangle ABC$ једнакокрак, а како већ знамо да његов угао код темена C износи 60°, закључујемо да $\triangle ABC$ мора бити једнакостраничан. Међутим, тада се праве AD, BE и CF секу у једној тачки, контрадикција с претпоставком задатка.

Други разред – Б категорија

1. Уведимо смену $x^2 + 3x + 6 = t$. Једначина се своди на $\frac{5x}{t} + \frac{7x}{t+4x} = 1$, тј. $5xt + 20x^2 + 7xt = t^2 + 4tx$ (уз услове $t \neq 0$ и $t + 4x \neq 0$), што је еквивалентно са $t^2 - 8tx - 20x^2 = 0$. Дељењем обе стране са x^2 (уз постављање услова $x^2 \neq 0$) једначина се даље своди на $(\frac{t}{x})^2 - 8\frac{t}{x} - 20 = 0$, па увођењем нове смене $k = \frac{t}{x}$ добијамо $k^2 - 8k - 20 = 0$. Решења ове квадратне једначине су $k_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-20)}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}$, тј. $k_1 = \frac{8+12}{2} = 10$ и $k_2 = \frac{8-12}{2} = -2$. За $k = 10$ после враћања смене имамо $x^2 + 3x + 6 = t = kx = 10x$, тј. $x^2 - 7x + 6 = 0$, чијим решавањем добијамо $x_{1/2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2}$, тј. $x_1 = 6$ и $x_2 = 1$. За $k = -2$ после враћања смене имамо $x^2 + 3x + 6 = t = kx = -2x$, тј. $x^2 + 5x + 6 = 0$, чијим решавањем добијамо $x_{3/4} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$, тј. $x_3 = -2$ и $x_4 = -3$. Сва четири добијена решења испуњавају услове дефинисаности, па они заиста јесу решења полазне једначине.

2. Означимо $\angle BAC = \alpha$, $\angle BDC = \beta$, $\angle AOD = \theta$, $\angle OAD = x$ и $\angle ODA = y$. Тада имамо и $\angle BCA = \alpha$ (јер је $\triangle ABC$ једнакокрак), а и $\angle DBC = \beta$ (јер је $\triangle BCD$ једнакокрак), као и $\angle BOC = \theta$ (унакрсан са $\angle AOD$). Из $\triangle BOC$ имамо $\theta = 180^\circ - \alpha - \beta$, а из $\triangle AOD$ имамо $\theta = 180^\circ - x - y$, одакле следи $\alpha + \beta = x + y$. Даље, услов задатка се преводи у $2\theta = \alpha + x + \beta + y$, што уз закључак из претходне реченице даје $2\theta = 2(\alpha + \beta)$, тј. $\theta = \alpha + \beta$; сада поново из $\triangle BOC$ добијамо $\theta = 180^\circ - \theta$, тј. $\theta = 90^\circ$. Дакле, дијагонале BD и AC су међусобно нормалне, тј. BO и CO су висине у $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$, редом. Како су ови троуглови једнакокраки, њихове висине и тежишне дужи се поклапају, па следи да је O средиште дужи AC и BD. Према томе, у четвороуглу $ABCD$ дијагонале се полове, па је он паралелограм, а како су дијагонале још и међусобно нормалне, тај паралелограм је ромб.



Ок 2019 2Б 2

3. У посматраних 9 боца укупно има 126 децилитара млека, па следи да свака домаћица треба да добије по 3 боце са укупно 42 децилитра млека.

Посматрајмо домаћицу која је добила боцу са 26 децилитара млека. У преостале две боце она има укупно још 16 децилитара, што је могуће само на следећа два начина: $2 + 14$ или $5 + 11$. Претпоставимо најпре да важи први случај. Тада она домаћица која је добила боцу са 23 децилитра у преосталим двема боцама има укупно 19 децилитара млека, што је (од неподељених боца) могуће добити само као $8 + 11$; тада трећој домаћици остају боце са 5, 17 и 20 децилитара млека. Дакле, у овом случају, у зависности од тога која је „прва“, која „друга“, а која „трећа“ домаћица, имамо 6 начина поделе (колико има и пермутација ове три домаћице). Слично, уколико претпоставимо да је прва домаћица добила боце са 5, 11 и 26 децилитара млека, тада видимо да она која је добила боцу са 23 децилитра мора добити још боце са 2 и 17 децилитара, а трећој онда остају боце са 8, 14 и 20 децилитара млека. Дакле, и овде имамо 6 начина поделе (опет у зависности од пермутације домаћица).

Према томе, укупно постоји 12 начина да поделе боце у складу с условима задатка.

4. Подизањем обе стране једначине на трећи степен (користећи идентитет $(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$), добијамо

$$x + 2 + 3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) + 3x + 1 = x - 3,$$

тј.

$$3\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}(\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+1}) = -3x - 6.$$

Израз у загради представља поново леву страну полазне једначине, па он мора бити једнак $\sqrt[3]{x-3}$; уврштавањем овога (и дељењем обе стране са 3) долазимо до

$$\sqrt[3]{x+2}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{x-3} = -(x+2).$$

Напоменимо, последња једначина није *еквивалентна* с полазном (само је њена последица); то значи да за свако нађено решење те последње једначине морамо проверити да ли оно заиста задовољава и полазну једначину.

Подизањем обе стране последње једначине на трећи степен добијамо

$$(x+2)(3x+1)(x-3) = -(x+2)^3.$$

Једно решење је очигледно $x = -2$. Директно се проверава да је то заиста решење и полазне једначине (обе стране износе $\sqrt[3]{-5}$). Под претпоставком $x \neq -2$, скраћивањем $x + 2$ са обе стране остаје $(3x+1)(x-3) = -(x+2)^2$, тј. $3x^2 - 9x + x - 3 = -(x^2 + 4x + 4)$, што је еквивалентно са $4x^2 - 4x + 1 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4}}{8} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}$. Проверимо да ли и ово решење испуњава полазну једначину. На левој страни добијамо $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + 2} + \sqrt[3]{3 \cdot \frac{1}{2} + 1} = 2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, а на десној страни $\sqrt[3]{\frac{1}{2} - 3} = \sqrt[3]{-\frac{5}{2}}$, па $x = \frac{1}{2}$ *није* решење полазне једначине.

Дакле, једино решење је $x = -2$.

5. Како је број a дељив са 9, и збир његових цифара мора бити дељив са 9, тј. број b је дељив са 9. Одатле, из истог разлога, и број c је дељив са 9, а потом закључујемо да је и број d дељив са 9. Даље, како број a има 2019 цифара, а свака његова цифра може бити највише 9, следи да број b износи највише $2019 \cdot 9 = 18171$. Број c, дакле, износи највише $1 + 8 + 9 + 9 + 9 = 36$ (јер цифре у броју b на четвртој и петој позицији здесна, ако уопште постоје, износе највише 8 и 1, тим редом, док су остале цифре највише 9), а онда број d може бити највише $2 + 9$, тј. највише 11. Дакле, обједињавањем добијених закључака констатујемо да је d број који није већи од 11 а који је дељив са 9; према томе, једина могућност је $d = 9$.

1. Израчунавамо:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}5+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}5)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}5)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\frac{2}{3})}=\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5)}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}5)}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1.$$

Дакле, како тангенс израза у поставци износи 1, вредност тог израза је $\frac{\pi}{4}$ (тј. реч је о углу од 45°).

2. Очигледно, $p>3$ (јер би у супротном лева страна била мања од десне), па како је p прост број, следи $p\equiv\pm1 \pmod 3$. Одатле имамо $p^2\equiv 1 \pmod 3$. Такође имамо и $2500\equiv 1 \pmod 3$, те уколико постављену једначину трансформишемо у облик

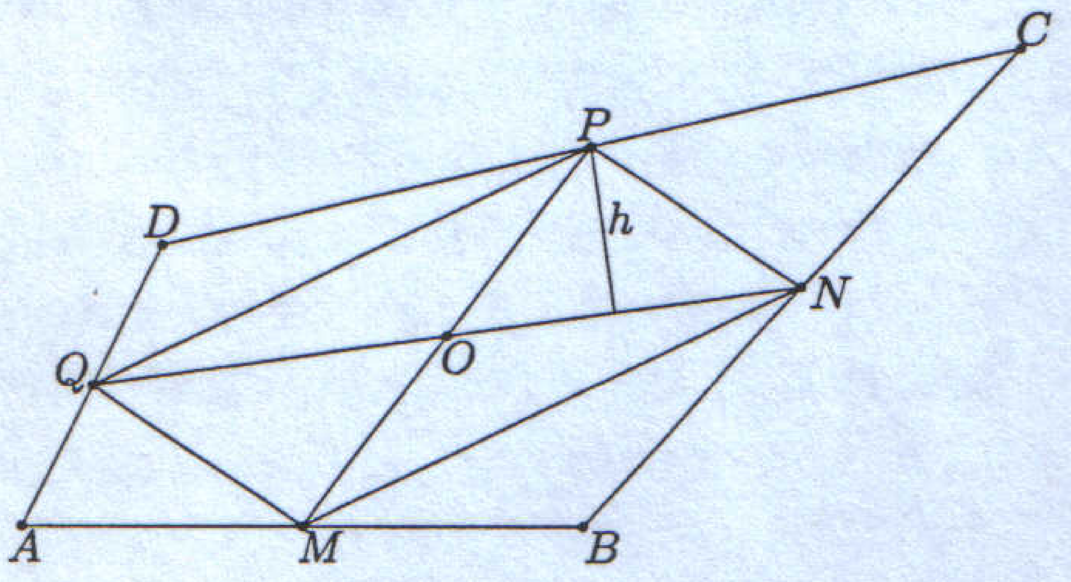
$$p^2-2500=qr,$$

лева стране је дељива са 3, па то мора бити и десна. Како су q и r прости бројеви, један од њих мора бити 3. Претпоставимо, без умањења општости, да је то q. Приметимо $2500=50^2$, па се лева страна може факторисати као разлика квадрата, после чега преостаје $(p-50)(p+50)=qr=3r$. Како је r прост број, имамо само следеће две могућности.

- $p-50=3$, $p+50=r$: Следи $p=53$ и $r=103$, што јесу прости бројеви па имамо једно решење.
- $p-50=1$, $p+50=3r$: Следи $p=51$, што није прост број, те овде немамо решења.

Узимајући у обзир и то да q и r могу заменити улоге, постоје укупно две тројке које задовољавају услове задатка: $(p,q,r)\in\{(53,3,103),(53,103,3)\}$.

3. За леву страну постављене неједначине имамо $x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2\geqslant 2$, а за десну имамо $\sqrt{4-x^2}\leqslant\sqrt{4}=2$. Дакле, једина могућност је да и лева и десна страна буду једнаке 2. Међутим, из извођења малопре примећујемо да је лева страна једнака 2 само за $x=1$, а десна је једнака 2 само за $x=0$. Дакле, никада не могу обе стране истовремено бити једнаке 2, па постављена неједначина нема решења.



Ок 2019 3Б 4

4. Означимо средишта страница AB, BC, CD, DA са M, N, P, Q, редом, и нека се дужи MP (дужине 2) и NQ (дужине 3) секу у тачки O. Тада су MN, NP, PQ, QM средње линије у $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$, редом, па важи $P(\triangle MBN)=\frac{1}{4}P(\triangle ABC)$, $P(\triangle NCP)=\frac{1}{4}P(\triangle BCD)$, $P(\triangle PDQ)=\frac{1}{4}P(\triangle CDA)$ и $P(\triangle QAM)=\frac{1}{4}P(\triangle DAB)$. Сабирањем ове четири једнакости добијамо

$$\begin{aligned}P(\triangle MBN)+P(\triangle NCP)+P(\triangle PDQ)+P(\triangle QAM)&=\frac{1}{4}(P(\triangle ABC)+P(\triangle CDA)+P(\triangle BCD)+P(\triangle DAB))\\&=\frac{1}{4}\cdot 2P(ABCD)=\frac{1}{2}P(ABCD).\end{aligned}$$

Одатле следи и $P(MNPQ)=\frac{1}{2}P(ABCD)$. Такође због уочених средњих линија имамо $MN\parallel AC\parallel QP$ и $NP\parallel BD\parallel MQ$, па је $MNPQ$ паралелограм. Нека је h висина повучена из тачке P на дијагоналу NQ. Тада због угла од 45° имамо $h=\frac{PO}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{MP}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (средњу једнакост добијамо на основу чињенице да се дијагонале паралелограма полове). Одатле израчунавамо $P(MNPQ)=2P(\triangle NPQ)=2\cdot\frac{QN\cdot h}{2}=3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, па коначно и $P(ABCD)=2P(MNPQ)=3\sqrt{2}$.

5. а) Посматрајмо шестоугао са уписаним бројевима који испуњавају услове задатка. Како нису сви бројеви исти, постоје два суседна темена таква да је у једном од њих уписан број -1 а у другом 1; нека су то A и B, редом, и нека су наредна темена C, D, E и F. Тада у C мора бити 1 (да би производ бројева у A, B и C био -1), па затим у D мора бити -1 (због B, C и D), потом у E мора бити 1 (због C, D и E), и коначно и у F мора бити 1. Према томе, збир износи $-1+1+1+(-1)+1+1=2$.

b) Као у делу под а) налазимо темена A_1 и A_2 у којима су уписани бројеви -1 и 1, редом. Тада у темену A_3 мора бити број 1, па онда у темену A_4 број -1, па у темену A_5 број 1, у A_6 број 1, у A_7 број -1 итд. Примећујемо да се образац понавља, тј. да је у теменима чији индекс даје остатак 1 при дељењу са 3 увек уписан број -1 (другим речима, на сваком трећем темену), а у свим осталим теменима број 1. Према томе, у $\frac{2019}{3}$, тј. 673 темена је уписан број -1, а у преосталих 1346 темена број 1, па збир свих уписаних бројева износи: $673\cdot(-1)+1346\cdot 1=673$.

Четврти разред – Б категорија

1. Квадрирајмо обе једнакости дате у поставци и потом их саберимо. Добијамо:

$$\begin{aligned}61 &= (16\sin^2\alpha + 40\sin\alpha\cos\beta + 25\cos^2\beta) + (25\sin^2\beta + 40\sin\beta\cos\alpha + 16\cos^2\alpha)\\ &= 16(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) + 25(\sin^2\beta+\cos^2\beta) + 40(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)\\ &= 16+25+40\sin(\alpha+\beta) = 41+40\sin(180^\circ-\gamma) = 41+40\sin\gamma.\end{aligned}$$

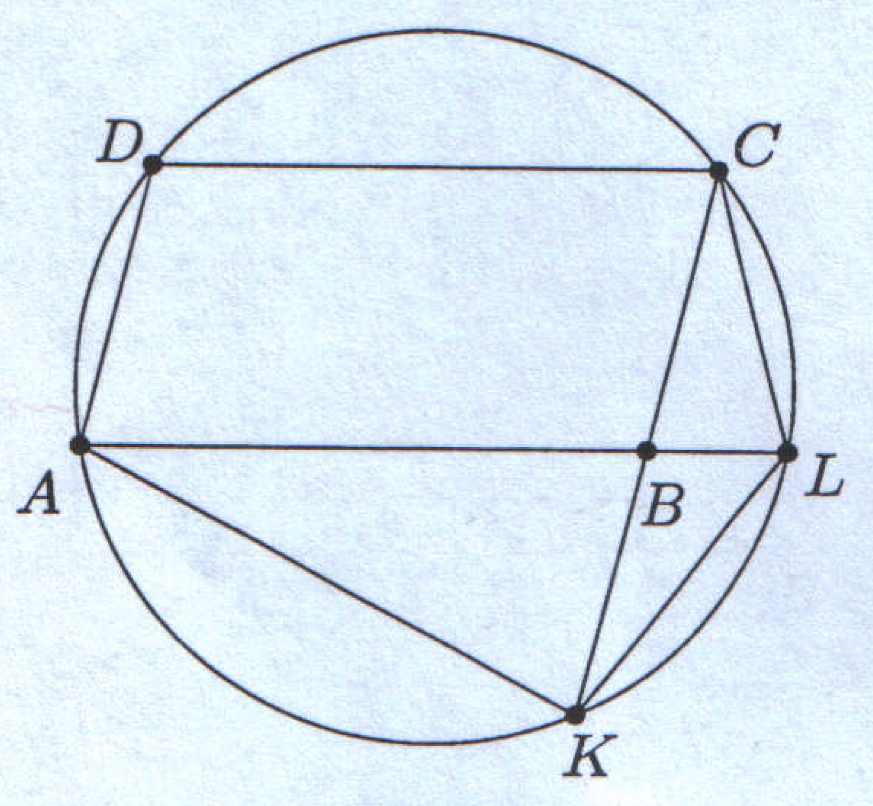
Одатле имамо $\sin\gamma = \frac{61-41}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$, тј. $\gamma = 30^\circ$ или $\gamma = 150^\circ$. Друга могућност отпада због услова да је $\triangle ABC$ оштроугли, па остаје $\gamma = 30^\circ$.

2. Да би израз у поставци био дефинисан, мора важити $\log_2(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}) \geqslant 0$, тј. $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} \geqslant 1$. Но како, по дефиницији функције cos, лева страна не може бити већа од 1, остаје $\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 1$, тј. $\frac{\pi x}{\sqrt{2}} = 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$, те остаје $D = \{2\sqrt{2}k : k \in \mathbb{Z}\}$. Према томе, за $x \in D$, број x^2 може бити $8\cdot 0^2$, $8\cdot 1^2$, $8\cdot 2^2$... Како имамо $8\cdot 15^2 = 1800 < 2019 < 8\cdot 16^2 = 2048$, најмања вредност израза $|2019 - x^2|$ постиже се за $x = 2\sqrt{2}\cdot 16$ и износи $2048 - 2019 = 29$, што јесте прост број.

3. Важи $n^2+4n-15 = n^2+4n+4-19 = (n+2)^2-19$, па пошто овај број треба да буде дељив са 361 а имамо $361 = 19^2$, следи да је посматрани број дељив и са 19. Онда $19 \mid (n+2)^2$, па пошто је 19 прост број, добијамо и $19^2 \mid (n+2)^2$. Но, тада из овога и $361 \mid (n+2)^2 - 19$ следи $361 \mid 19$, што је очигледна контрадикција. Дакле, такав број не постоји.

4. Пребројмо прво колико максимално може бити таквих бројева чије су цифре у опадајућем поретку. Сваки такав број је једнозначно одређен одабиром пет (различитих) цифара које га сачињавају (након што су цифре одабране, број добијамо њиховим сортирањем у опадајућем поретку), па пошто имамо 10 цифара на располагању, таквих бројева има $\binom{10}{5}$. Пребројмо сада оне бројеве чије су цифре у растућем поретку. Слично као малопре, и сваки такав број је једнозначно одређени одабиром цифара које га сачињавају; притом сада на располагању имамо само 9 цифара од којих можемо бирати 5, јер међу одабраним цифрама не сме бити 0 (ако би била, онда би она, због растућег поретка, морала ићи на почетак телефонског броја, што је забрањено условом задатка). Дакле, у овом случају имамо $\binom{9}{5}$ бројева. Укупан резултат је: $\binom{10}{5} + \binom{9}{5} = 252 + 126 = 378$ телефонских бројева.

5. Из $CL = CB$ добијамо $\measuredangle CLB = \measuredangle CBL = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па тачке A, L, C и D леже на истој кружници (због суплементности периферијских углова над истом тетивом с различитих страна). На сличан начин, из $AK = AB$ добијамо $\measuredangle AKB = \measuredangle ABK = 180^\circ - \measuredangle ABC = 180^\circ - \measuredangle ADC$, па и тачке A, K, C и D леже на истој кружници. Дакле, свих пет тачака A, K, L, C и D леже на истој кружници, што је и требало доказати.



Ок 2019 4Б 5