Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Први разред – Б категорија

1. Одредити скупове A и B за које важи следећих пет особина:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- $2 \in A \setminus B$;
- $3 \in B \setminus A$;
- $A \cap \{4, 5, 6\} = \varnothing$;
- $B \cap \{1\} = \varnothing$.

2. Бетмен хоће да провали шифру Едварда Нигме. Њему је познато да шифра представља неку пермутацију слова у изразу `TRICKORTREAT`, и да су притом прво и последње слово шифре једнаки. Колико укупно постоји могућности за такву шифру?

3. У тетивном четвороуглу $ABCD$ важи $\measuredangle ADB = 50^\circ$ и $\measuredangle CDB = 60^\circ$. На правој AC је одабрана тачка M за коју важи $\measuredangle AMB = 70^\circ$. Да ли се тачка M налази између тачака A и C, или је изван дужи AC?

4. Доказати да је број $10^{2019} - 9991$ дељив са 81.

5. Из једног темена оштроуглог троугла повучена је висина, из другог тежишна дуж, а из трећег симетрала унутрашњег угла. Те три праве имају три пресечне тачке. Доказати да троугао коме су те тачке темена не може бити једнакостраничан.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\frac{5x}{x^2+3x+6}+\frac{7x}{x^2+7x+6}=1.$$

2. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC = CD$, а његове дијагонале се секу у тачки O. Ако важи $2\angle AOD = \angle BAD + \angle CDA$, доказати да је $ABCD$ ромб.

3. Три домаћице Зока, Јока и Цока су на пијаци добиле 9 затворених боца с млеком, и у њима је, редом: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23 и 26 децилитара млека. На колико начина оне могу поделити ове боце између себе (без отварања боца), а да при томе свака добије исти број боца и исту количину млека?

4. У скупу реалних бројева решити једначину:

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-3}.$$

5. Нека је a природан број који има 2019 цифара и дељив је са 9. Нека је b збир цифара броја a, нека је c збир цифара броја b, и нека је d збир цифара броја c. Одредити број d.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати:

$$\operatorname{arcctg} 5 + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}.$$

(Решење приказати у облику експлицитне бројевне вредности изражене у степенима или радијанима.)

2. Наћи све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи

$$p^2 - qr = 2500.$$

3. Решити неједначину:

$$x^2 - 2x + 3 \leqslant \sqrt{4 - x^2}.$$

4. У конвексном четвороуглу $ABCD$ дужи које спајају средишта наспрамних ивица имају дужине 2 и 3 и међусобно заклапају угао од $45°$. Израчунати површину четвороугла $ABCD$.

5. У сваком темену правилног n-тоугла је уписан број 1 или -1, при чему нису свих n бројева једнаки. Производ бројева уписаних у ма која 3 узастопна темена износи -1. Одредити збир свих уписаних бројева за:

a) $n = 6$;

b) $n = 2019$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

23. фебруар 2019.

Четврти разред – Б категорија

1. У оштроуглом $\triangle ABC$ углови код темена A, B и C означени су са α, β и γ, редом. Ако важи

$$4\sin\alpha + 5\cos\beta = 6$$

и

$$5\sin\beta + 4\cos\alpha = 5,$$

одредити γ.

2. Нека је D скуп свих реалних бројева за које је израз

$$\sqrt{\log_2\left(\cos\frac{\pi x}{\sqrt{2}}\right)}.$$

дефинисан. Означимо

$$A = \min_{x\in D}|2019 - x^2|.$$

Доказати да је A природан број и да је прост.

3. Да ли постоји природан број n за који важи

$$361 \mid n^2 + 4n - 15 \quad ?$$

4. У месту Доње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у строго растућем или строго опадајућем поретку, и притом прва цифра није 0. Колико максимално телефонских бројева може постојати у том месту?

5. Дат је паралелограм $ABCD$ са оштрим углом код темена A. На правима AB и BC су уочене, редом, тачке L и K различите од тачке B, такве да важи $KA = AB$ и $LC = CB$. Доказати да је петоугао $AKLCD$ тетиван.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детально образложити.